

# 遞迴性多層次相對運動之幾何圖樣研究

廖冠智\* 孫春望\*\*

\* 臺中健康學管理學院資訊與設計學系  
e-mail: can@thmu.edu.tw

\*\* 國立臺灣科技大學設計研究所  
e-mail: suncw@mail.ntust.edu.tw

(收件日期: 92年12月17日; 接受日期: 94年03月11日)

## 摘要

遞迴性多層次相對運動(Recursive Multiple-level Relative Motion)之軌跡是結合物理運動、數學與視覺藝術三大特性的幾何形態，有別於眾所週知的 Fractals Art 與 LOGO。本研究是在相對運動的基本型態下，建立具有遞迴特性的相對運動，以產生有趣、高度變化與兼具視覺美感的幾何圖樣。操控運動系統間的角度變量直接改變圖樣的形態，本研究先操控一般的角度變量以觀察圖樣的變化，再深入整理角度變量總合的關係性，並分成「調變各角度變量之比率變化」與「順時/逆時角度變量總和平衡」兩種模式，所獲得的幾何圖樣兼具複雜與秩序的形式。以藝術設計的觀點來看，運用遞迴性多層次相對運動所產生的軌跡造形，可以看到無窮盡的圖樣變化。另外探討其它運動型式之幾何軌跡，皆是未來持續研究的課題。

關鍵詞：遞迴、相對運動、軌跡、幾何圖樣

## 一、研究背景

作者於上一個研究：「描圖器與相對運動軌跡之造形方法」[1]中已指出物理運動所構成的幾何軌跡圖樣，具有高度變化與兼具視覺美感。該研究並系統化整理、分析與簡化運動系統的組合程序，指出三項關聯變因：「運動系統間關係的複雜程度」、「運動系統間的軌跡型式」與「軌跡形成的幾何敘述」。從這三種概念出發分別探討對於造形程序的影響，以及可能的既有模式，透過分析軌跡造形的研究方法以輔助設計者產生運動型式的組合方案。但對於結合數學裡遞迴概念的物理運動型式所產生的造形演變，並未做深入的解析與研究。

在視覺設計的領域裡，經常運用數學運算來進行幾何造形創作，以獲得高度複雜(complexity)、反覆(repetition)、對稱(symmetry)、融合變形(metamorphosis)與秩序(order)等視覺美感之形態，如眾所周知的碎形藝術(Fractals Art)，是從最原始的數學方程式：「 $f(z) = z^2 + c$ 」構成曼德布洛特集合(Mandelbrot set)，經由遞迴疊代(recursion)演變而產生兼具視覺美感的幾何藝術，到目前為止世界各地仍有許多愛好者創作碎形藝術，以作為設計活動中的素材考量[8]。

除了碎形藝術外，LOGO 語言也會用來創作有趣與複雜的幾何造形。在許多電腦語言中「遞迴」是常見的一種概念，而 LOGO 與碎形藝術皆運用遞迴特性，反覆地來執行許多自身(itself)的程序(Procedure)，以繪製幾何圖形[2]。如下列為一段 LOGO 程式的示範，以繪製螺旋形(spirals)幾何圖樣，在執行程序\**pollyspi* 中即含呼叫自身的過程，並且每呼叫一次便增加 *inc* 單位的 *side* 數量，週而復始後產生螺旋形的圖樣[3]。

```
to pollyspi :side :ang :inc
  fd :side rt :ang
  *pollyspi (:side + :inc) :ang :inc
end
```

另一種與遞迴特性相似的執行方式稱為重述(iteration)，在電腦程式語言中亦為一種常見的執行型態。重述是指反覆執行一組事先定義好的程序，而這些程序中並不包含呼叫自身的敘述(statement)，同時重述經常需要定義全部反覆執行的次數。運用重述概念進行造形創作同樣可以獲得高度複雜與多變的幾何形態，英國生物學家 Odds 經由 LOGO 的發展首先提出 Spirolaterals 觀念[9]，Krawczyk 將之運用於創作藝術造形[5]，並且演變新的執行方式與創作規則。Spirolaterals 概念在於反覆重述一組繪製線段的程序，該程序同時包含線段的單位長度(unit length)、旋轉方向/角度(turning direction/degrees)與轉折次數(number of turns)，透過這些程序的組成以產生複雜的幾何造形。上述 Fractals Art、LOGO 與 Spirolaterals 可說是結合數學與視覺美學兩領域的整合，所創造的幾何造形皆有兩者結合的特徵與形態。

然而，從天文學中亦可發現用來產生幾何造形藝術的歷史痕跡。托勒密(Claudius Ptolemy)在其著名的 *Almagest* 天文學著作中，主張以地球為宇宙中心的觀點，並且靜止不動，並以其體運動中用均輪(deferent)與本輪(epicycle)來解釋運動的概念，deferent 是指太陽環繞地球的運行軌道，而 epicycle 是指其他行星(如月亮環繞 deferent 時所形成的軌道，此學說即為主宰西方天文學思維將近 1500 年之久的「地心說(Geocentric Universe)」[4]。以哲學的角度來看，當時認為所有運行軌道的軌跡集合皆為完美的圓形，因為圓形是人類最容易想像的幾何圖形。假設 deferent 與 epicycle 皆為相同的運動方向，可以發現 epicycle 在某處會呈現稍微停止後再逆轉，最後恢復成原本的方向，這個現象稱為「retrograde motion」[10]；而當 deferent 運行一個週期後，epicycle 軌道的整體幾何軌跡就像是一片花朵的圖樣，如圖 1 所示。

作者的此一研究即從如下概念出發：假使改變地心說中地球靜止不動的說法，地球也會被其他星體所牽制，亦或增加 epicycle 與 deferent 的層次數目，以產生多層次相對運動(Multiple-level Relative Motion，以下簡稱 MRM)，epicycle 軌跡將會有不同的變化，同時在軌跡的運動過程中記錄座標、計算交疊頻率，與定義相對應的色階值，最後產生新穎兼具視覺藝術的幾何圖樣。

更有甚者，Martineau 修改托勒密系統中 deferent 的角色[7]，令原本靜止不動的模式改變成移動式的偏心圓形態(moveable encentric)，這種情況下的花朵圖樣將會變的怪異與有趣。Martineau 並提出宇宙中經常發生令人意想不到的星體運動模式，而且伴隨獨特的軌道圖樣(orbital pattern)，同時現今尚無明確的理論可以解釋這些宇宙間的巧合(cosmic coincidence) 是如何發生。譬如用線段以固定週期來連接行星與地球之間的位置，由於行星的軌道環繞速度平均大於地球，將使這些線段構成具有藝術美感的圖樣。

Martineau 所提出的軌道圖樣兼具物理運動與視覺藝術的特徵，本研究在圖延續 Martineau 的概念，以藝術圖像設計的角度出發，將數學的「遞迴特性」加入「物理運動」的模式中，藉以研究兩者結合的模式將會產生何種視覺美感的幾何藝術。同時建立遞迴性多層次相對運動(Recursive Multiple-level Relative Motion，以下簡稱 R-MRM)，分析影響造形變異的變因，並進一步操控角度變量、遞迴階層數與環繞半徑以理解圖樣形式的變化狀態。

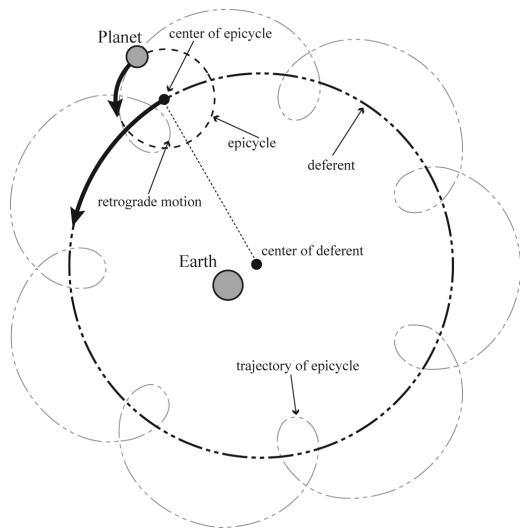
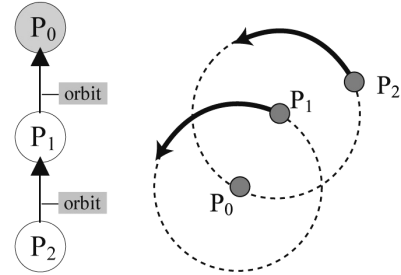


圖 1 Geocentric Universe 中 Epicycle 與 Deferent 的軌跡示意圖

Multiple-level Relative Motion(MRM)



Recursive Multiple-level Relative Motion(R-MRM)

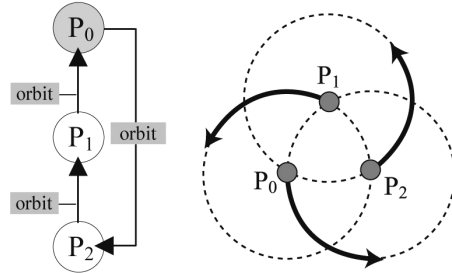


圖 2 多層次相對運動與遞迴性多層次相對運動之模型示意圖

## 二、遞迴性多層次相對運動

### 2-1 遞迴性多層次相對運動之定義

古數學裡遞迴的概念是執行包含「自身程序」的程序，而在物理中遞迴特性將會是空間的關係。MRM 概念之基本模型其實可用圖 2 來解釋，是屬於 top-down 型式之多階層運動系統，其中  $P_0$  視為一靜止不動的座標，同時也是多階層中的最上層座標，自此可知 MRM 的運動模式無法經由窮舉方式來獲得全部的可能組合方式。而 R-MRM 概念之基本模型則為 self-circular 型式，原本最上層的  $P_0$  座標依序以最下層的  $P_2$  座標為運動中心，呈現封閉性的環繞狀態，彼此受到自身上層的運動牽制，使得運動模式只有單純的一種型式。因此在 R-MRM 的整體運動系統中，不再具有 deferent 軌道，每一個運動座標其實就是運行於 epicycle 軌道。為了探討的方便，本研究單從運動過程的角度變量來實驗圖樣的變化情形，捨棄地心說中種種的具體運動主張。

### 2-2 觀察遞迴運動之過程

在簡單的 MRM 運動過程中，相對上可以很容易地想像軌跡圖樣的繪製過程，如圖 2 的 MRM， $P_1$  為圓形而  $P_2$  會因為  $P_0P_1$  與  $P_1P_2$  的距離，以及所環繞的角度差異而產生類似花朵的圖樣。而 R-MRM 的環繞過程卻不是很容易想像，為了能更清楚瞭解 R-MRM 的運動狀態，本研究先觀察兩層的 R-MRM 運動情形，其中初始角度為  $0^\circ$ ，角度變量為  $30^\circ$ 、環繞半徑為 30 pixel 的操控下，軌跡結果如圖 3 所示。

圖 3 中的  $P_0$  與  $P_1$  皆為順時針方向(clockwise)的環繞。Cycle 1 時  $P_0$  環繞  $P_1$  獲得新位置 A，接著  $P_1$  環繞  $P_0$  同樣獲得新位置 B，Cycle 2 時  $P_0$  與  $P_1$  依此類推分別獲得新位置 C 與 D，由於遞迴的特性使得彼此所受牽制的上層系統產生相當大的位置差異，同時導致下一週期時環繞中心的位置變化，最後持續到

第十二週期時， $P_0$ 、 $P_1$  整體的軌跡圖樣皆呈現為計 12 邊形。如果將角度變量減少為  $10^\circ$ ，便會獲得計 36 邊形的軌跡，也就是說為了獲得較為細緻的計圓形，可以將角度變量進一步地減少；而環繞半徑則直接控制幾何圖樣的尺度大小。

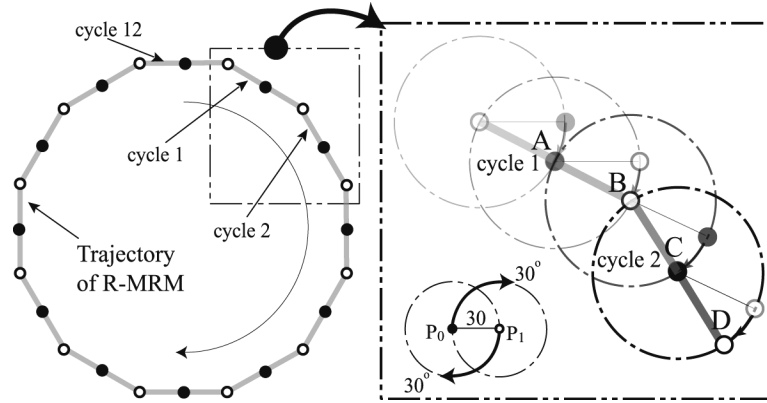


圖 3 兩階層 R-MRM 運動過程示意圖(順時針角度變量)

若改變  $P_1$  為逆時針(counter-clockwise)的環繞方向，軌跡圖樣將大為改變，呈現結果如圖 4 所示。其中新位置 A、C 分別為 Cycle 1、Cycle 2 時  $P_0$  總日遞迴環繞後的結果，而 B、D 則為  $P_1$  環繞後的新位置。因為  $P_0$  與  $P_1$  環繞方向不同，在本例中剛好平衡(balance)彼此的牽制力量，使得新位置有重複的現象，但都會在同一條直線上，最後到 Cycle 12 時整體的軌跡圖樣呈現兩條直線，各為  $P_0$  與  $P_1$  的軌跡集合。

R-MRM 比 MRM 更加難以預測所產生的軌跡圖樣，從觀察 R-MRM 的運動過程中，發現自身的運動路徑改變後的新位置除了牽制本身的從屬系統外，還會影響自身所屬從動系統的運動行徑，因而也牽動了自身下一步的行為。

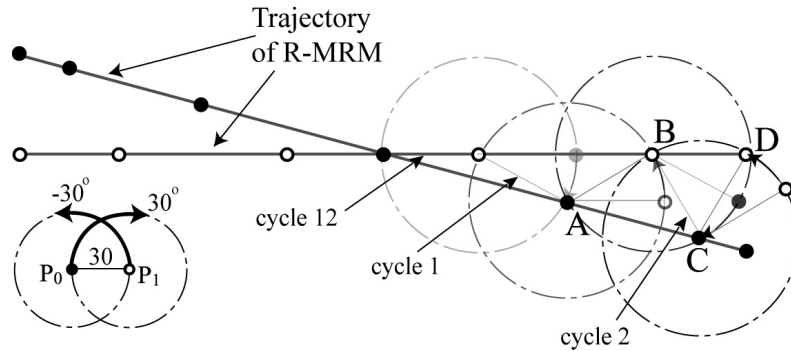


圖 4 兩階層 R-MRM 運動過程示意圖(逆時針角度變量)

### 2-3 操控角度變量參數

在 R-MRM 中有三種因素會影響軌跡圖樣的變化，分別為「遞迴系統的階層數目(levels)」、「各運動系統間的環繞半徑(radius)」與「各運動系統間的角度變量(angular increment)之比率關係(ratio)」。  
 本研究發現，遞迴的階層數目必然與圖樣的複雜度有密切的關聯性；而影響軌跡外形式在於操控各角度變量之間比率的變化模式(case)外，環繞半徑亦影響著軌跡圖樣的變化，以及尺度(scale)上的大小。在兩層 R-MRM 的簡化系統中，環繞半徑與角度變量的關係是：若操控相同的環繞半徑，並且互相交換各角度變量時，所產生的軌跡圖樣將是鏡射對稱(Mirror Symmetry)的型式。

當操控角度變量的參數時，增加細微變異值(Slight Variation, 簡稱 SV)將逐漸微調軌跡的演變(evolution)，隨著變異值的大小會加粗軌跡的寬度(width)，或產生新的軌跡位置，最後將交疊出許多蘊藏的圖樣。如圖 5 呈現出在變異值相差 10 倍的情況下其軌跡演變的差異，當變異量愈大時將急遽地改變軌跡的外觀，在比較相同的運動次數情況下， $SV = -0.0011$  的軌跡變化程度比  $SV = -0.00011$  還要快，若持續運動下去，最終的圖樣外觀則十分類似，除非變異值的大小改變了原有系統間角度變量上的比率變化。

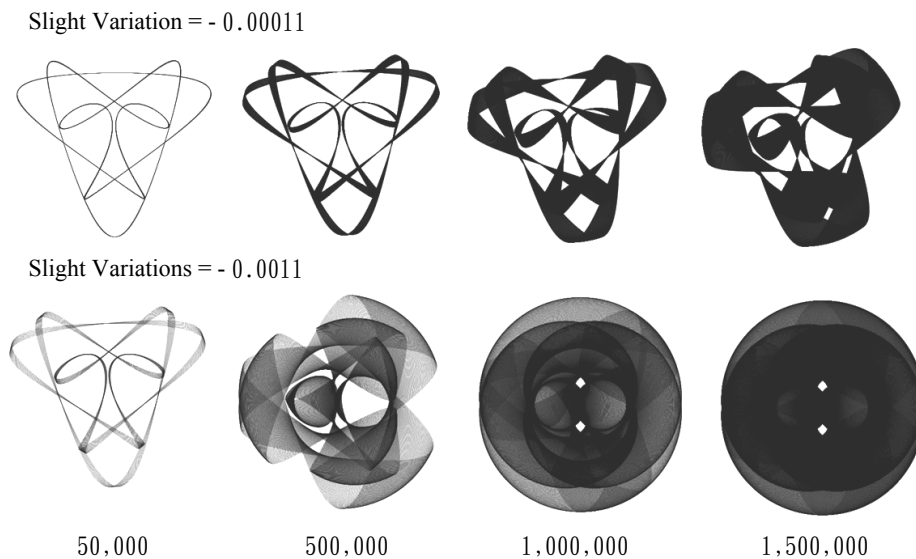


圖 5 調變細微變異值與運動軌跡變化之關係

R-MRM 的運動型式經常發生軌跡超出原設定的螢幕大小，為了能方便擷取圖樣，將環繞半徑設定愈小可以盡可能地限制軌跡的運動範圍，同時又可以保有尺度不同但外觀形式相同的圖樣；也由於各環繞半徑極為接近，因此同一座標系統所產生的軌跡皆為相似的圖樣，只需其中一組軌跡集合便會趨近於整體的運動結果。由此可知，影響軌跡的方向行徑將以各角度變量間的比率來決定，獨立出角度變量的因素，可以讓我們更容易預測 R-MRM 軌跡的生成趨勢。

綜合上述的發現，以兩層的 R-MRM、環繞半徑皆為 1 pixel 為例，若操控各角度變量比率為 1:1(即各角度變量均等)，將獲得圓形(circle)；若比率為-1:1 或 1:-1 則呈現直線(line)的圖樣。若角度變量比率為 1:2 的關係，可以得知  $3^\circ$  與  $6^\circ$ 、 $15^\circ$  與  $30^\circ$  以及  $30^\circ$  與  $60^\circ$  等依此類推所產生的軌跡圖樣是相同的，差異的是圖樣的尺度大小。為了能更清楚理解與系統化研究角度變量與最後圖樣變異的關聯性，本研究將每個 R-MRM 運動系統的環繞半徑設定為十分接近的狀態，藉由操控各角度變量的呈現比率以獲得新的軌跡圖樣。依據角度變量具有順時與逆時的特性，可將比率關係分成「調變各角度變量之比率變化」與「順時/逆時角度變量總和平衡」兩種模式，並作如下的深入討論。

### 2-3.1 調變各角度變量之比率變化

「調變各角度變量之比率變化」是指將 R-MRM 中角度變量值的總和均分成  $n$  個等份，而每個運動系統各佔有一定之比率關係。例如表 1 呈現兩層 R-MRM 的角度變量，將總和均分成 10 等份下其各運動系統的角度變量之變化組合，軌跡表示於圖 6，而表 1 中 Case I-5 之後其實是將 Case I-4~I-1 的角度變量互相對調，因此所產生的圖樣將是鏡射對稱的形狀，我們以 Case I-4 與角度對調後的關係為例，將結果呈現於圖 7。

假使劃分  $n$  等份的尺度愈細，可以獲得較多的角度比率組合，以產生較多的圖樣形式。同時加入角度變量的細微變異值致使軌跡產生變化，以 Case I-3、I-4 的  $P_1 \rightarrow P_0$  角度變量各加入 0.001，可以產生如圖 8 的軌跡，再比對圖 6 的(c)與(d)後發現軌跡的位移造就了整體圖樣的變異。

表 1 Case Study I：  
調變各角度變量之比率變化

Case	角度變量		圖
	$P_0 \rightarrow P_1$	$P_1 \rightarrow P_0$	
I-1	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	6(a)
I-2	$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$	6(b)
I-3	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	6(c)
I-4	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	6(d)
I-5	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$	6(e)

$P_0$ 、 $P_1$  環繞半徑：5 pixel

表 2 Case Study II：  
順時/逆時角度變量總和平衡

Case	角度變量			圖
	$P_0 \rightarrow P_1$	$P_1 \rightarrow P_2$	$P_2 \rightarrow P_0$	
II-1	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	-1	9(a)
II-2	$\frac{2}{10}$	$\frac{8}{10}$	-1	9(b)
II-3	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	-1	9(c)
II-4	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	-1	9(d)
II-5	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$	-1	9(e)

$P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  環繞半徑：1 pixel

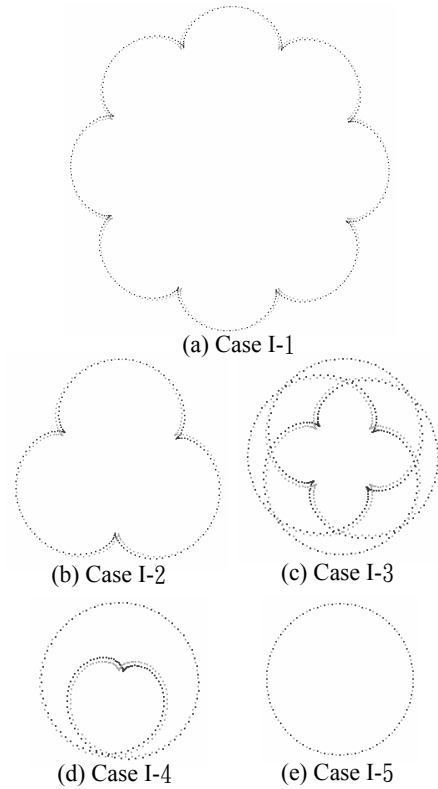


圖 6 Case Study I: 兩階層 R-MRM 之軌跡結果 (6,000 iterations)

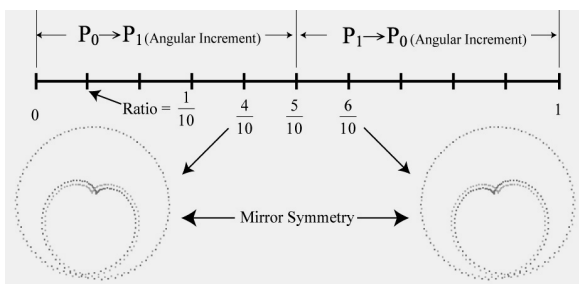
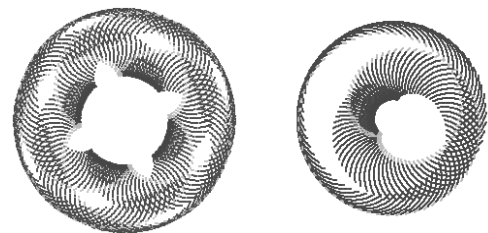


圖 7 Mirror Symmetry 示意圖



Case I-3 Case I-4  
圖 8 加入 slight variation 於  $P_1 \rightarrow P_0$  角度變量的結果 (sv = +0.001、6,000 iterations)

### 2-3.2 順時/逆時角度變量總和平衡

「順時/逆時角度變量總和平衡」是指順時針方向角度變量總和與逆時針總和的平衡關係。若以兩層 R-MRM 為例的情況下會產生一條直線軌跡，這是因為順向、逆向的角度變量總合力相平衡的因素；若以三層 R-MRM 為例，可操控的角度變化組合同樣劃分 10 等份之下，將獲得如表 2 的結果，軌跡呈現於圖 9。

當然尺度劃分的愈細，可以產生變化愈多的圖樣，從表 2 的例子中我們可將 Case II-3 與 Case II-4 之間的尺度再劃分成 10 等份，得到的軌跡呈現於圖 10 中，從圖樣的演變可以觀察到，軌跡外觀大致維

持三角形(triangle)的形式，不同的是圖樣內部軌跡的緊密程度。在本例中愈緊密的圖樣其角度變量中都會有質數(prime)形式的存在，如圖 10 的 b、d、h 與 j 圖樣分別有 31/100、67/100、37/100 與 61/100 等質數性角度變量；而相對其他較不密集之圖樣，其角度變量皆能被化約成最簡(simplify)之數值。同時 f 圖樣的角度變量是 a 與 k 圖樣的平均值，兩者比較後在感覺上線條的轉折與曲度似乎可以發現有許多相似之處。

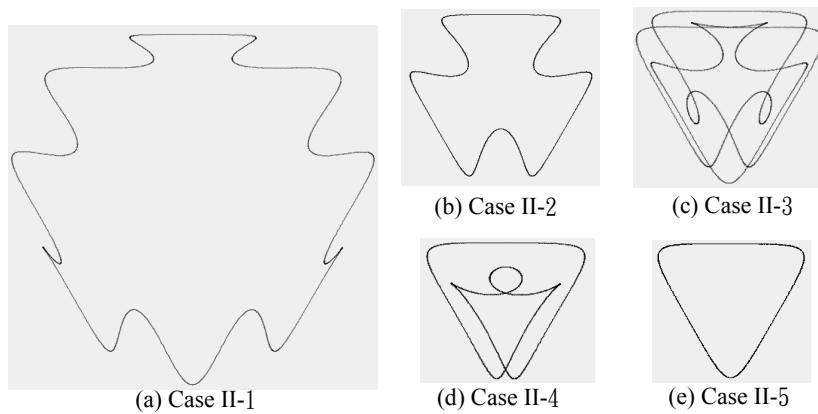


圖 9 Case Study II：三階層 R-MRM 之軌跡結果(6,000 iterations)

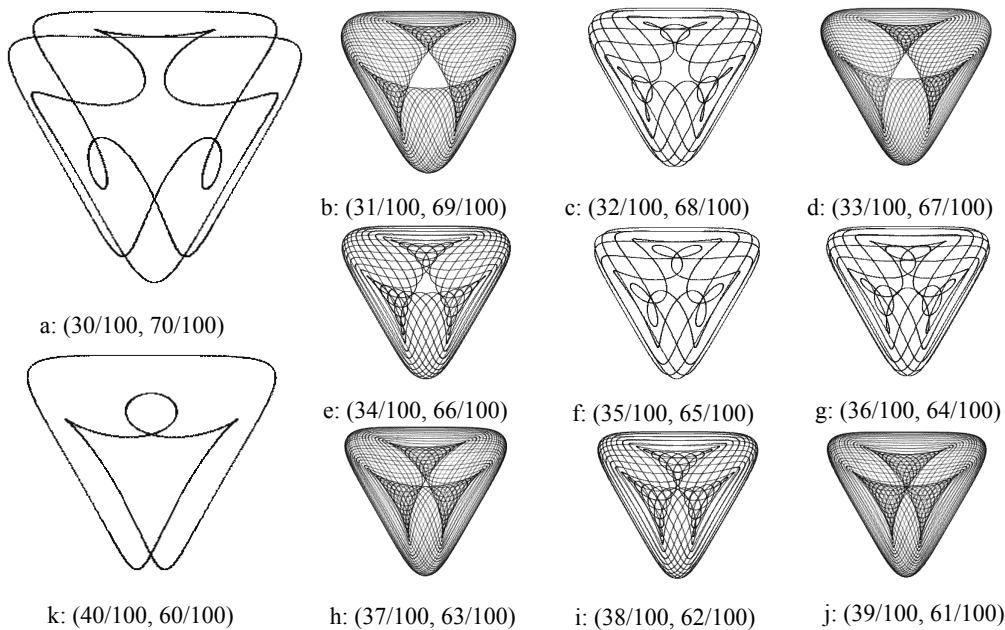


圖 10 將 Case II-3 與 Case II-4 之間再細分 10 等份，角度變量為  $(P_0 \rightarrow P_1, P_1 \rightarrow P_0)$  運算 60,000 iterations

除了順時與逆時角度變量總和平衡外，還可操控平衡以外的情況，例如比率上正為消長的關係。在表 2 中  $(P_2 \rightarrow P_0)$  的角度變量為 -1，而  $(P_0 \rightarrow P_1)$  與  $(P_1 \rightarrow P_2)$  的角度變量總和則為 1，呈現出互相平衡/衰減的狀態，若進一步增加(increase)或減少(decrease)  $P_2 \rightarrow P_0$  的角度變量比率，可以獲得其它富有變化的圖樣。如圖 11 所示，我們以表 2 的 Case II-3 為例，固定不變  $(P_0 \rightarrow P_1)$  與  $(P_1 \rightarrow P_2)$  的角度變量為  $(3/10, 7/10)$ ，只操控  $(P_2 \rightarrow P_0)$  的角度變化，所產生的軌跡圖樣變化。

圖 11 中的 a 至 t 圖樣是操控 $(P_2 \rightarrow P_0)$ 分別為 $-1/10$  至  $-20/10$ ，每次增加  $1/10$  角度的結果，另外 u、v、w 與 x 圖樣為調變逆向角度分別高達 $-25/10$ 、 $-3/10$ 、 $-4/10$  與  $-24/10$  倍數值的軌跡，而 a 至 i 圖樣為順向大於逆向角度總和，j 圖樣是 $k$  為平衡(順向與逆向總合為 0)的軌跡，k 至 x 圖樣則為順向小於逆向的角度總合。從圖 11 圖樣的演變中可以看到，隨著倍數增加其軌跡的整體外形其實與 x 圖樣相似，差別在於線條筆觸 (stroke) 的細微呈現為波浪狀所構築而成的整體軌跡，另外 c 與 g 圖樣的 $(P_2 \rightarrow P_0)$ 角度變量分別平衡了 $(P_0 \rightarrow P_1)=-3/10$  與  $(P_1 \rightarrow P_2)=-7/10$ ，使得軌跡外形呈現扁長的發展，而 c 圖樣可視為 g 垂直方向擠壓後的結果。

若進一步操控其 $(P_0 \rightarrow P_1)$ 與 $(P_1 \rightarrow P_2)$ 的順向角度比率，再增加/減少逆向角度之總和，所獲得的軌跡將會是千變萬化，如表 3 為操控順向、逆向角度之間比率組合的軌跡變化。若分別獨立觀察每個順向角度的組合與逆向角度從 $-1/10 \sim -240/10$  的軌跡演變，發現兩者差距愈大時，最終圖樣的軌跡筆觸將呈現波浪狀，而且軌跡外形與內含圖樣似乎都會被簡化(simplicity)。透過操控順向/逆向角度總合之間的倍數比率，可獲得富有變化的軌跡圖樣，而比率組合劃分的愈細，所產生的軌跡則更難以想像。

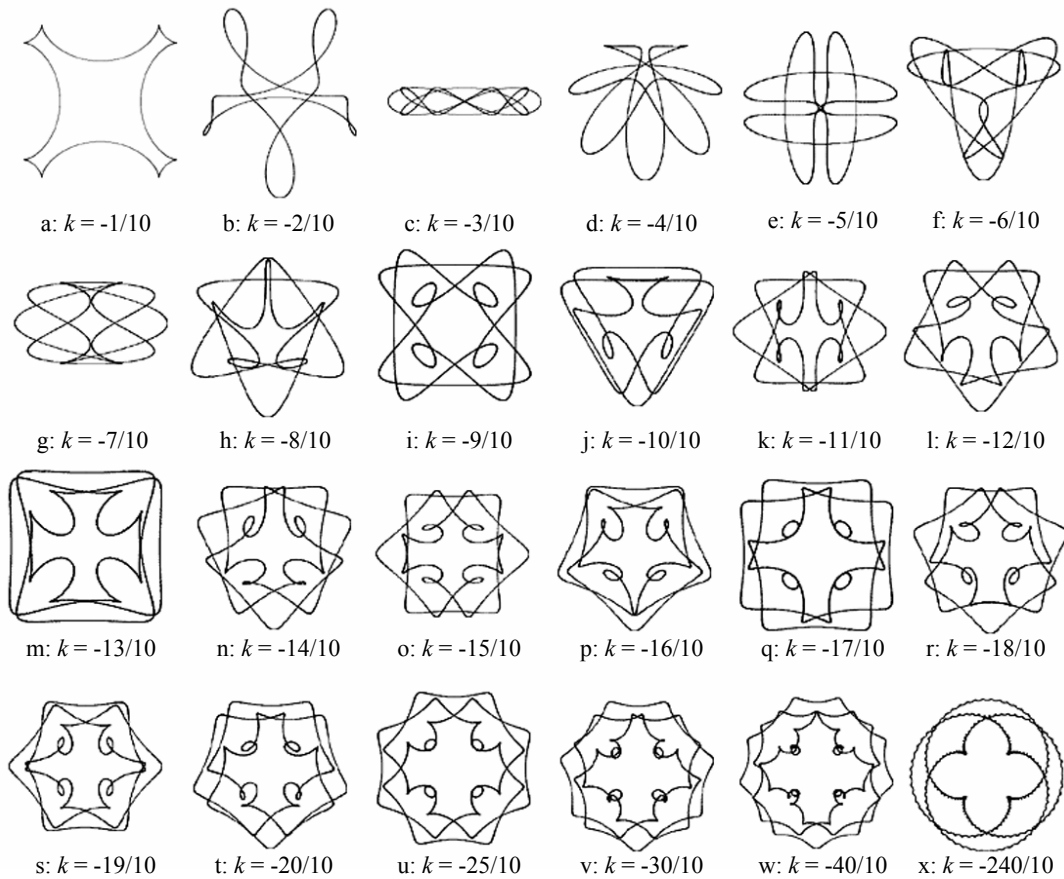


圖 11 以 Case II-3 為引，增加/減少逆時針角度變量之軌跡結果，角度變量為  $(P_0 \rightarrow P_1, P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_0) = (3/10, 7/10, k)$ ，運算次數為 10,000 iterations.

### 2-4 運動軌跡的原始圖樣

軌跡在持續運動到某一運算次數(iterations)後，會循環於前已繪製過的位置，我們將此第一運動週期所產生的軌跡稱為原始圖樣(primitive pattern)。如表 3 中 $(P_0 \rightarrow P_1, P_1 \rightarrow P_2)$ 與 $(P_2 \rightarrow P_0)$ 分別為 $(5/10, 5/10)$  與 $(-5/10)$ 的軌跡呈現出橢圓圖樣(oval)，運動週期為 720 iterations，由於各角度變量已達平衡，所以持



續運動後仍然維持相同的橢圓原始圖樣，爲了能讓橢圓在其空間生長，可加入 SV 值於某一角度變量中，促使軌跡進行時產生位置差異。若直接觀察軌跡形成的過程，SV 使得原始圖樣旋轉。如圖 12 所示，加入 SV 值(=-0.01)於(P<sub>2</sub>→P<sub>0</sub>)的角度變量中，橢圓同時旋轉亦及疊充前已繪畫過的軌跡，最後成爲一個環狀造形(rings)。

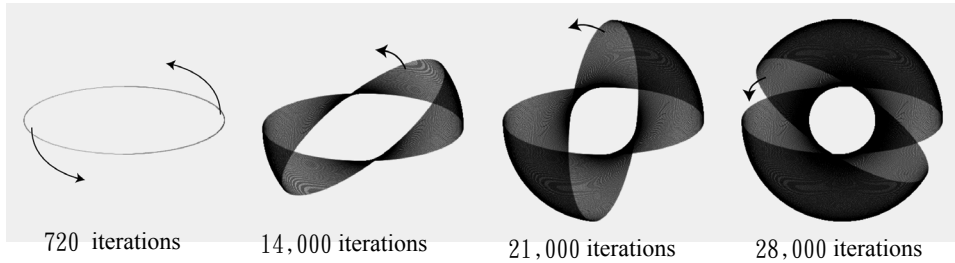


圖 12 Slight variation 使得原始圖樣旋轉，角度變量爲 (P<sub>0</sub>→P<sub>1</sub>, P<sub>1</sub>→P<sub>2</sub>, P<sub>2</sub>→P<sub>0</sub>) = (5/10, 5/10, -5/10 + (-0.01))，sv = -0.01

表 3 Case Study III :

操控順向/逆向角度變量總和平衡之軌跡演變

(P <sub>2</sub> →P <sub>0</sub> )	角度變量: (P <sub>0</sub> →P <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> →P <sub>2</sub> )				
	( $\frac{1}{10}, \frac{9}{10}$ )	( $\frac{2}{10}, \frac{8}{10}$ )	( $\frac{3}{10}, \frac{7}{10}$ )	( $\frac{4}{10}, \frac{6}{10}$ )	( $\frac{5}{10}, \frac{5}{10}$ )
$-\frac{1}{10}$					
$-\frac{5}{10}$					
$-\frac{10}{10}$					
$-\frac{15}{10}$					
$-\frac{20}{10}$					
$-\frac{240}{10}$					

P<sub>1</sub>、P<sub>2</sub>、P<sub>3</sub> 環繞半徑: 1 pixel

加入 SV 值除了使得原始圖樣旋轉外，還會同時改變圖樣外形，在圖 12 中由於  $(P_0 \rightarrow P_1)$  與  $(P_1 \rightarrow P_2)$  的角度變量彼此平衡，因此橢圓旋轉時並未改變其外形，若改變平衡狀態改以其分配比率，將會同步演化原始圖樣。如圖 13 中是以式 3 中操控  $(P_0 \rightarrow P_1)$  與  $(P_1 \rightarrow P_2)$  為  $(3/10, 7/10)$ ，加入 SV 值  $(=-0.001)$  於  $(P_2 \rightarrow P_0)$  的  $-5/10$  為例，首先會產生第一週期的原始圖樣（運動週期為 3,600 iterations），也就是說圖中 11th 週期的圖樣是指運動次數自第 36,000（即 10th）至 39,600（即 11th）iterations 之間的軌跡呈現，其週期依此類推。

觀察圖 13 中原始圖樣的週期演變，發現圖樣呈現逆時針方向的旋轉，圖樣內部也會變異，若以 Cycle 51<sup>st</sup> 為圖樣演變的分界點，則該週期之前與之後的圖樣互為互鏡射對稱的關係，例如 Cycle 11<sup>th</sup> 與 Cycle 91<sup>st</sup>、Cycle 21<sup>st</sup> 與 Cycle 81<sup>st</sup>、Cycle 31<sup>st</sup> 與 Cycle 71<sup>st</sup>、Cycle 41<sup>st</sup> 與 Cycle 61<sup>st</sup> 等皆是互鏡射對稱形式。而整體原始圖樣的演變過程在 Cycle 101<sup>st</sup> 結束，並呈現與 Cycle 1<sup>st</sup> 相同的軌跡外形，若之後持續進行運動，將循環先前軌跡的演變結果。因此 R-MRM 在某運動次數的運算後所獲得的軌跡圖樣，其實可視為每一組運動週期的軌跡集合。從觀察軌跡的動態生長過程，可發現圖樣中交疊部分的成形狀況，每一階段的軌跡形態都有不同的感覺。如圖 14 是將圖 13 的實例依運算次數的順序所呈現出來的結果，當運算將近 360,000 iterations 時，圖樣的整體外形不再變化，如果繼續執行運算，軌跡將不斷的重複內部交疊，而最終圖樣外觀仍然維持原本的形式。

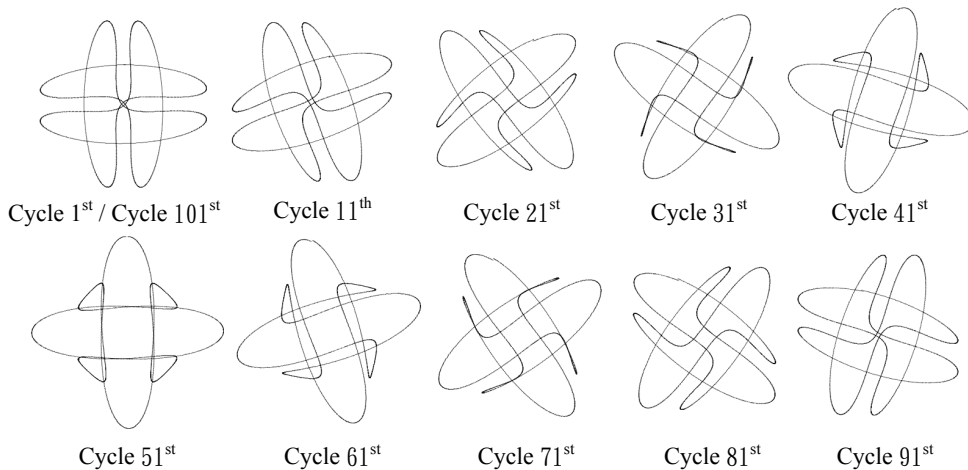


圖 13 原始圖樣之演變過程，週期為 3,600 iterations，角度變量為  $(P_0 \rightarrow P_1, P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_0) = (3/10, 7/10, -5/10 + (-0.001))$ ， $sv = -0.001$

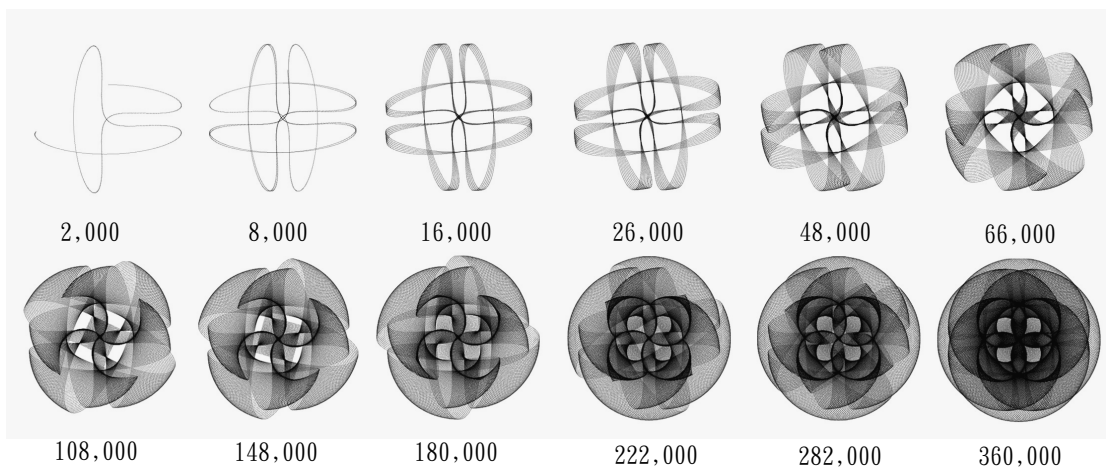


圖 14 增加 slight variation 於  $P_2 \rightarrow P_0$  角度變量之圖樣演變過程，角度變量為  $(P_0 \rightarrow P_1, P_1 \rightarrow P_2, P_2 \rightarrow P_0) = (3/10, 7/10, -5/10 + (-0.001))$ ， $sv = -0.001$ ，單位：iterations

### 三、幾何軌跡圖樣試驗

#### 3-1 決定遞迴階層數

本研究操控 R-MRM 中各系統間角度變量的比率，來產生多變化的軌跡圖樣，所有的 Case Study 爲了能擷取軌跡圖樣，本試驗將系統間的環繞半徑設定爲 1 pixel。本研究前半部論述是針對遞迴性物理運動的軌跡特性，作影響軌跡形態的分析與要因歸納，得知遞迴運動呈現一種單純的運動模式，而直接影響軌跡的因素有於：遞迴系統的階層數、環繞半徑與角度變量。另外，遞迴系統的階層數當然直接影響操控環繞半徑與角度變量比率的組合方式，階層數愈高則愈複雜化比率的操控，愈無法直接觀察軌跡圖樣的變異情形。因此本試驗僅就四階層、五階層與六階層的 R-MRM 系統進行造形試驗，以方便觀察圖樣的演變，相關參數列表如下；更高階層數礙於篇幅因素與就研究方便，本試驗不做討論。部分產生的圖樣依軌跡的交疊頻率(Visited Frequency)，透過色盤(Palette)來取得相對應的色相值(Hue)，以獲得具有豐富色彩的幾何圖樣，或者僅運用灰階層次來呈現軌跡內部的線條變化；而如何運用色盤與視覺化交疊頻率的方法已於作者的上一篇研究中完成說明[1]。

表 4 Case Study IV:  
四階層 R-MRM

Case	角度變量				圖
	P <sub>0</sub> →P <sub>1</sub>	P <sub>1</sub> →P <sub>2</sub>	P <sub>2</sub> →P <sub>3</sub>	P <sub>3</sub> →P <sub>0</sub>	
IV-1	$\frac{4}{19+a}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{5}{19}$	15
IV-2	0.20	0.30	-0.15	-0.35+b	16
IV-3	$\frac{11}{51}$	$\frac{17}{51}$	$-\frac{4}{51}$	$-\frac{10}{51}+b$	17
IV-4	$\frac{11}{51}$	$\frac{17}{51}$	$-\frac{4}{51}$	$-\frac{3}{51}+b$	18

Trajectory Recorded: P<sub>0</sub>  
Slight Variations: a=0.0003, b=-0.0003

表 5 Case Study V:  
五階層 R-MRM

Case	角度變量			圖
	P <sub>0</sub> →P <sub>1</sub>	P <sub>1</sub> →P <sub>2</sub>	P <sub>2</sub> →P <sub>3</sub>	
V-1	0.08+a	0.13	0.21	19
	0.34	0.76		
V-2	-0.08+b	0.13	0.21	20
	-0.34	0.55		
V-3	0.12	0.19+c	0.38+d	21
	0.72	-1.55+e		

Trajectory Recorded: P<sub>0</sub>  
Slight Variations: a=-0.00003, b=-0.000003,  
c=0.00416, d=0.00832, e=-0.00328

表 6 Case Study VI:  
六階層 R-MRM

Case	角度變量			圖
	P <sub>0</sub> →P <sub>1</sub>	P <sub>1</sub> →P <sub>2</sub>	P <sub>2</sub> →P <sub>3</sub>	
VI-1	0.22+a	0.066	-0.242	22
	0.374	-0.506	-0.572	
VI-2	0.35	0.29+b	0.42	23
	0.64+c	-2.1+d	-1.3	
VI-3	-0.19	-0.37+e	0.5	24
	0.28	0.42	0.48	

Trajectory Recorded: P<sub>0</sub>  
Slight Variations: a=0.000066, b=0.0000007,  
c=0.0000003, d=-0.00001, e=-0.00002

#### 3-2 軌跡圖樣的預測與評析

若要準確預測相關參數變化將導致圖樣的變異情形是一個極度複雜的課題。由於軌跡是隨著運算次數的增加(即時間的進行)而不斷地變換在空間中的位置，符近臨界-臨界值時，軌跡將持續重複先前曾經交疊過的空間，此時便可以確定是「最終(ultimate)」的軌跡圖樣；然而，預測何時會開始重複，可從

軌跡的最小頻率次數來判斷，假使最小次數超過一次的交疊，應可不必持續進行軌跡運動，因為所獲得的圖樣將不再有變化。在此之前，每一階段的軌跡都有不同感覺，也泛出不同的視覺認知，同時亦無法準確預測出最終圖樣會有何種特定的形態與幾何特徵，僅能就軌跡樣式作部份的趨勢研究。有時候全程觀察軌跡的運動情形，可以輔助瞭解最終圖樣的由來與如何產生細微的幾何特徵，以及它何時將完成一週期的原始圖樣。

事實上，每一軌跡運動要計算到最終圖樣是需要消耗大量時間，因為角度變量與環繞半徑的搭配，在複雜的操控組合下，將很難出現最小頻率次數超過 1 的狀態。以 Case V-1 為例，當運算至 18,000,000 iterations 時仍然未達最終圖樣的標準，但若繼續運算將不斷擴展軌跡變化，而新階段的變化結果或許會轉變上一階段曾經蘊含的視覺感受，感受卻未必會隨著運算的進行而強化或轉換成新的認知。因此，本試驗每一個 Case Study 僅從軌跡運動的過程中挑選出接近完整形態的圖樣結果，作為該運動的最終圖樣；雖然 Case V-1 中最終圖樣與其他階段的軌跡具有類似的外觀輪廓(outline)，但從圖樣內部發現各階段將呈現不同的感覺，而從線條的演變過程即可會意最終圖樣內部樣式的由來。

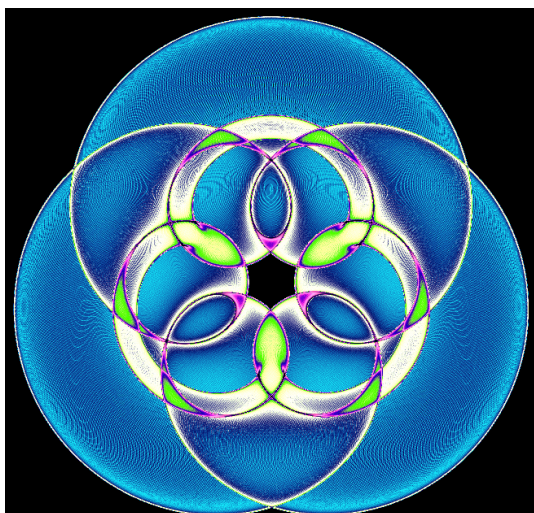
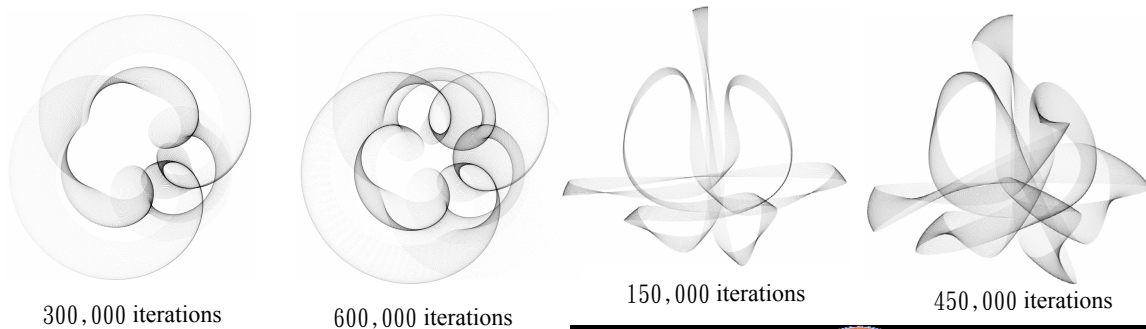
角度變量是影響軌跡圖樣的因素之一，而操控順時與逆時斜的角度是最直接的差別，在 Case IV-1 與 V-1 中各角度變量皆操控成順時狀態，若從軌跡細緻的形成過程中觀察線條的變動方向，可以發現軌跡似乎皆環繞圖樣內部的中心區域，差別在於環繞角度的幅度，也由於這個特性，最終圖樣常具有接近幾何圓的輪廓；反之若同時皆為逆時狀態，同樣會有類似的形式，只是軌跡的生成趨勢是逆向的，而最終圖樣位置與順向型式互相呈現出鏡射對稱之形態。

一般說來順時與逆時同時並用的操控方式容易導致較大的圖樣變異，除了 Case IV-1 與 V-1 外，其他 Cases 皆為順、逆互為操控的狀態。互為操控可以發現軌跡會有突然轉向(turning)的動作，而轉向經常引導出新的軌跡生成趨勢，並產生立即糾結(immediately intertwined)的軌跡交錯，接著會形成不同的幾何輪廓，也因為如此，最終的軌跡圖樣經常具有多變的外形，而非接近幾何圓的形態。軌跡交錯的部分將構成圖樣內部的視覺層次，如 Case IV-2 的最終圖樣，觀察前面階段軌跡的轉向結果，在圖樣內部產生一些轉折後的紋理(texture)，使得外觀呈現出互為對稱且奇特的幾何造形。

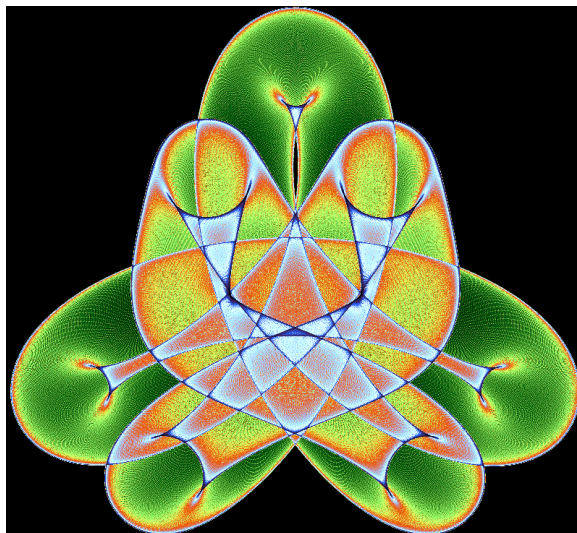
角度變量的 SV 值是改變週期原始圖樣的變因，而集合所有變動的原始圖樣將構成最終的造形。在前面表 3 所呈現之幾何造形皆為單純形式，為了能讓最終圖樣具有實體的交疊空間，角度必須加入 SV 值導致動態微調型式的變量比率，同時也漸變原始圖樣的外觀。以 Case VI-1 為例，若直接觀察軌跡的生成過程，發現運算次數達 16,362 iterations 時，軌跡開始進入下一個運動週期，所得的原始圖樣類似於在 200,000 iterations 階段的形態(差別在於少了線條的寬度)，而此時 SV 值又影響了下一週期的軌跡，以極細微的幅度漸變每一階段的運動；因此當 200,000 iterations 時可發現軌跡早已偏離(deviate)先前位置，同時加粗原有線條的寬度；若繼續比較 1,000,000 iterations 階段，由於糾結的軌跡彼此交錯在一起，逐漸構成最終的圖樣，並運用灰階色盤視覺化內部的層次，可以看到複雜兼具秩序的視覺感受。

SV 值的大小與軌跡偏離幅度成為最直接的關係，當 SV 值改變原有的變量比率時，將會獲得徹底不同的軌跡形式，而在生成趨勢的預測上自然更加複雜化。若適當運用 SV 值除了讓軌跡偏移外，還可產生豐富多變與自然流順的線條交錯，以 Case VI-2 的最終圖樣為例，共有兩個順時角度、一個逆時角度變量產生極為細微的 SV 值，該圖樣看似呈現出互為對稱的形式，但仔細比較下仍有些許差異，而轉折的線條交錯並蘊含出視覺藝術感，宛如墨汁滴入水中並潰散的現象，隱藏著一種複雜與和諧的軌跡變化。

另外，角度變量還可結合數列形式的概念。費波納希數列(Fibonacci Sequences)為許多數學家所討論的議題，在自然界有許多植物的生長狀況與組織排列似乎隱藏著 Fibonacci 的特性 [6]：數列中的數值是前兩項數值的總和，如 0、1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233、377、610、987、1597... 依此類推，而鄰近兩數值的比值接近黃金比例(Golden Mean,  $\approx 1.618$ )，在此特性下將呈現出新的排列層次。Case V-2 中所操控的角度變量即使用 Fibonacci 數列，並互用順時與逆時角度，操控 SV 值使軌跡逐漸偏移，使得圖樣的內部線條律動地(rhythmic)彼此交錯，並蘊藏著層次相疊的形式，與常見的植物花瓣排列形態有著異曲同工之妙。

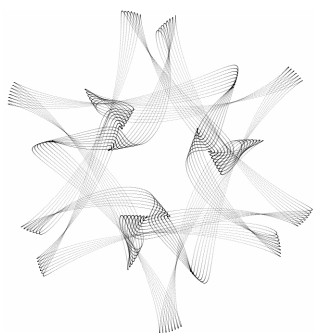


Colorization: 18,000,000 iterations

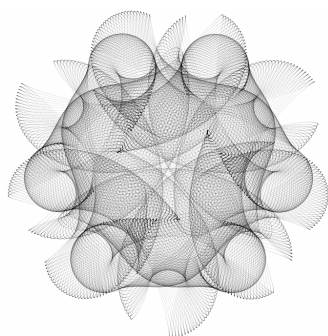


Colorization: 9,000,000 iterations

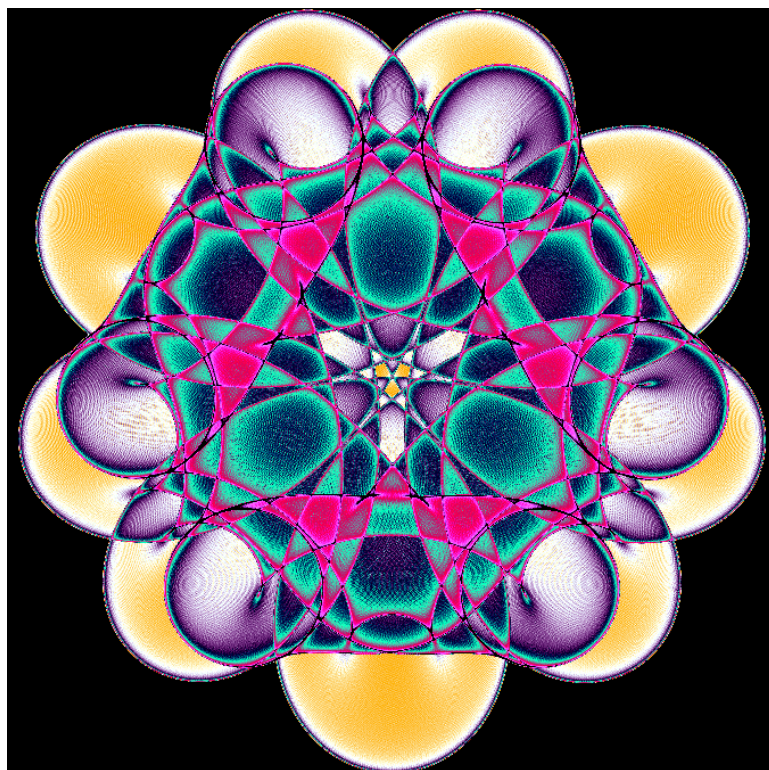
圖 15 Case Study IV-1: 四階層 R-MRM 之幾何圖樣      圖 16 Case Study IV-2: 四階層 R-MRM 之幾何圖樣



100,000 iterations



700,000 iterations



Colorization: 24,000,000 iterations

圖 17 Case Study IV-3: 四階層 R-MRM 之幾何圖樣

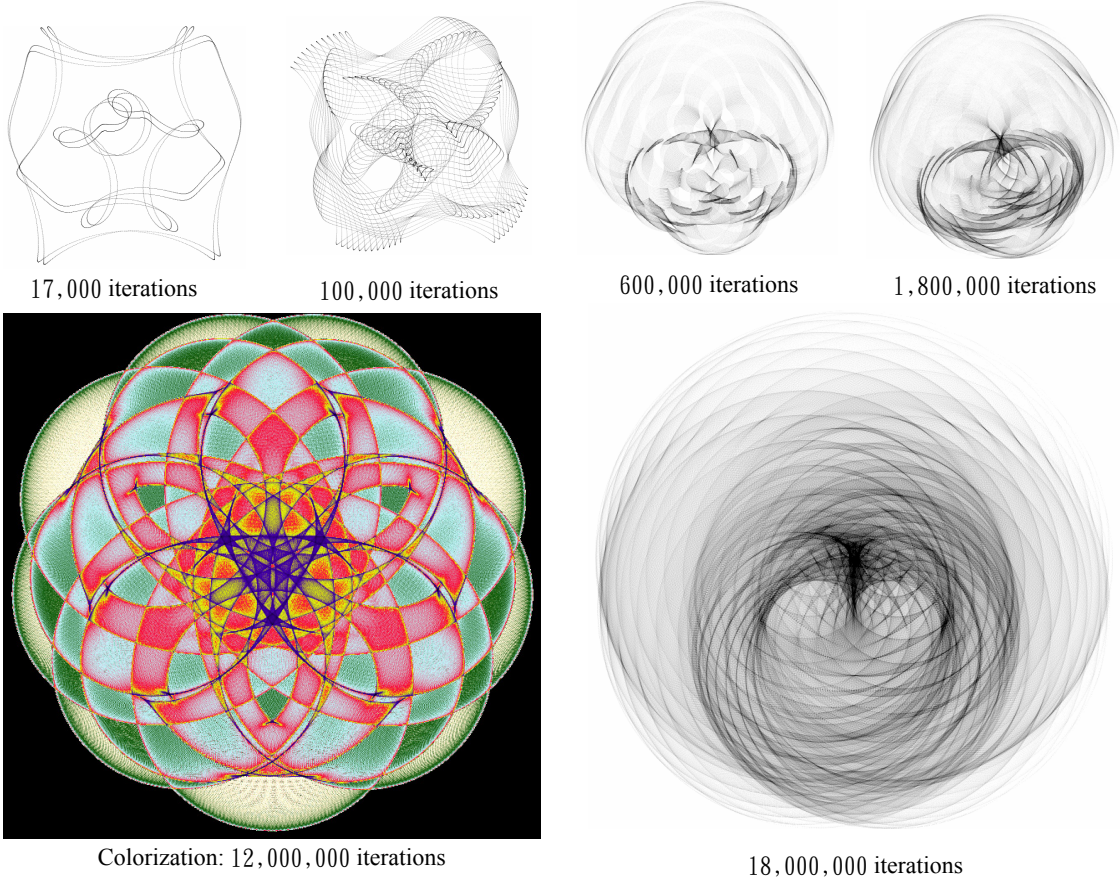


圖 18 Case Study IV-4: 四階層 R-MRM 之幾何圖樣

圖 19 Case Study V-1: 三階層 R-MRM 之幾何圖樣

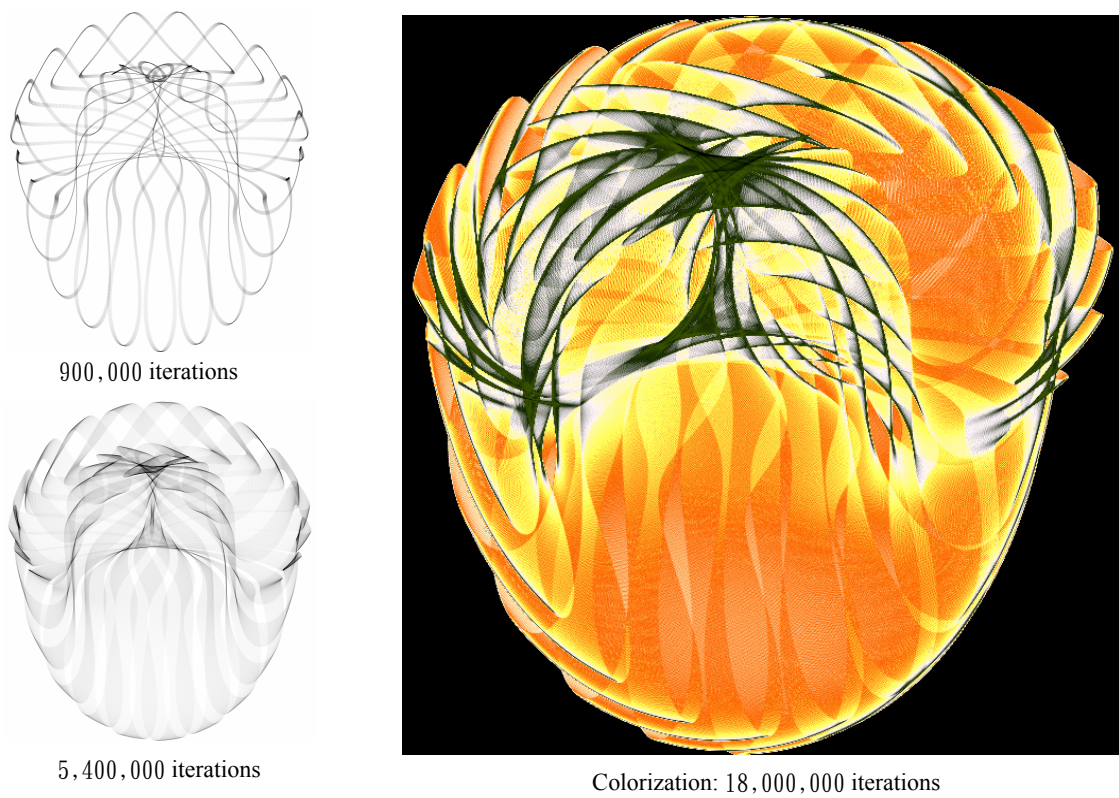
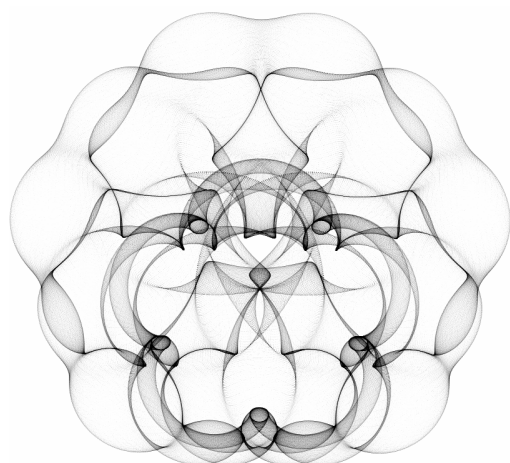
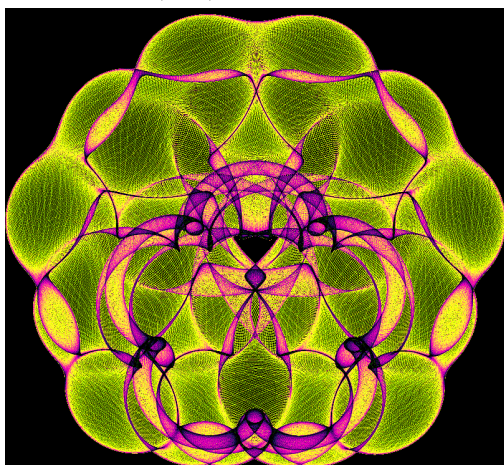


圖 20 Case Study V-2: 三階層 R-MRM 之幾何圖樣

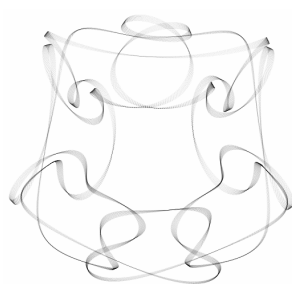


5,400,000 iterations

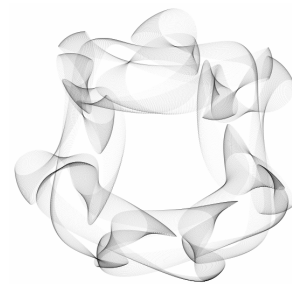


Colorization: 5,400,000 iterations

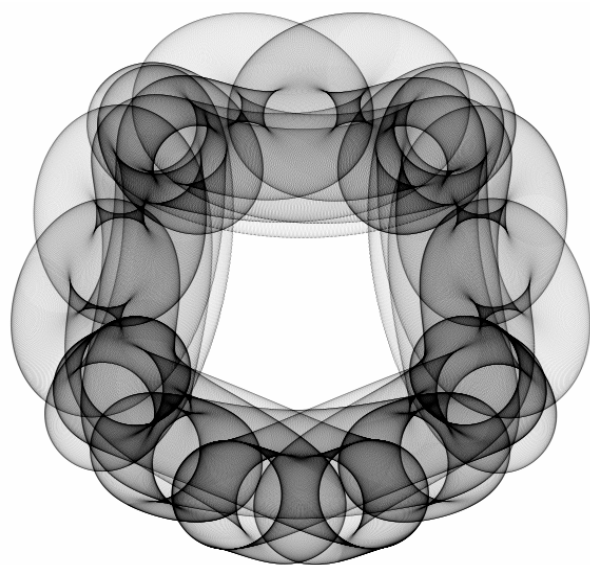
圖 21 Case Study V-3: 五階層 R-MRM 之幾何圖樣



200,000 iterations

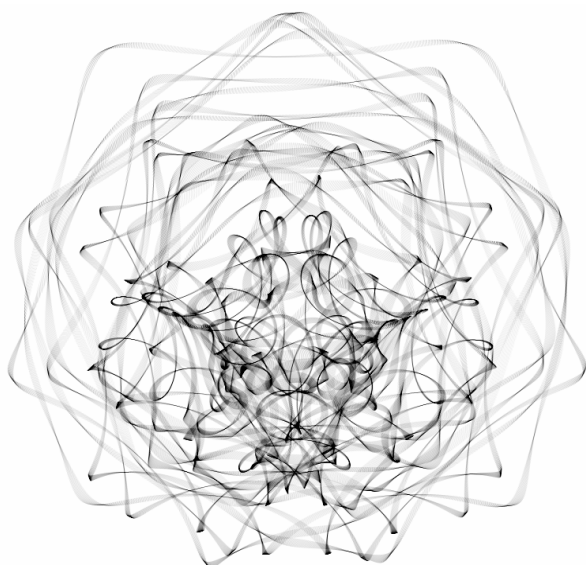


1,000,000 iterations



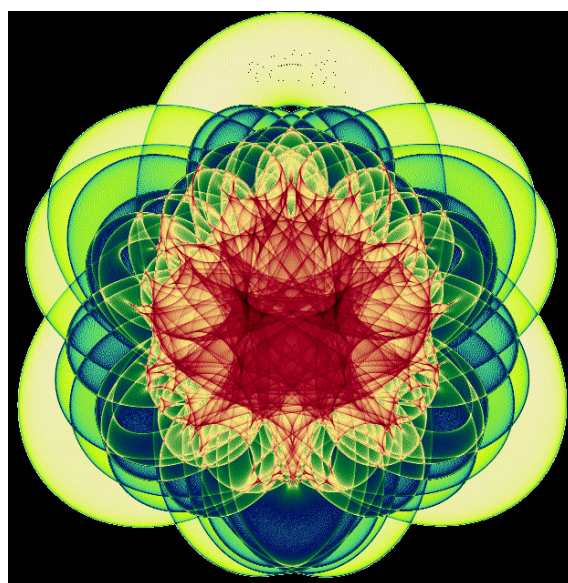
18,000,000 iterations

圖 22 Case Study VI-1: 六階層 R-MRM 之幾何圖樣



11,700,000 iterations

圖 23 Case Study VI-2: 六階層 R-MRM 之幾何圖樣



Colorization: 30,000,000 iterations

圖 24 Case Study VI-3: 六階層 R-MRM 之幾何圖樣

## 四、討論與後續研究

在視覺設計的領域裡，運用多變媒材來創作以整合出新穎的藝術作品，是設計活動中反覆發生的現象；運用數學方程式來創作造型是一種藝術活動，而使用物理運動來追求美的形式同樣是藝術設計裡不能忽視的一環，本研究結合物理的相對運動與數學的遞迴概念，來思考對於視覺造型創作是否能有助面與系統化的輔助，已經完成初步的研究成果：相對運動軌跡造型可以產生一系列豐富多變的幾何圖樣，而遞迴性質雖然呈現單純的運動模式，但實際卻使軌跡運動變的更加複雜；在遞迴的模式裡，些微差異的角度變量足以徹底改變先前的軌跡圖樣，而環繞半徑將可操控圖樣的尺度，同時遞迴階層數與圖樣複雜度有絕對的關係。

本研究在遞迴性多層次相對運動下，先操控一般的角度變量以觀察圖樣的變化，再深入分成「調變各角度變量之比率變化」與「順時/逆時角度變量總和平衡」兩種模式，並透過四階層、五階層與六階層的遞迴性運動試驗，以獲得有趣與高度變化的圖樣。增加遞迴運動的階層數目，愈加複雜化各角度變量的變化情形，內部圖樣亦呈現出複雜兼具秩序的感受，從操控角度變量的方式，將可獲得新穎與蘊含藝術美感的幾何圖樣，而經由色彩化的程序，所呈現的彩色圖樣亦有另一番不同的感覺。

準確預測最終的幾何軌跡是極端困難的課題，所牽涉的變因十分複雜，試驗中僅就軌跡的運動趨勢來解析最終圖樣的大致形式與視覺感受。為了能初步地預測軌跡的生成趨勢，試驗中的角度變量皆為一固定的常數值(constant)，當運算至某週期後，將循環原始圖樣的演變；若試圖改變角度常數為動態變化範圍(range of dynamic angular increment)，並設定範圍上限(ceiling-limit)、下限(floor-limit)與角度變量的微變值(dynamic angular increment)，致使角度變量不再為常數，則更加複雜化軌跡的演變狀態，所呈現的軌跡圖樣或許更加有趣。

另外，經由運動所產生的軌跡圖樣，其運動型式決定軌跡的變化情形，遞迴性多層次相對運動是屬於封閉型的系統型態，因此圖樣外觀的影響因素不啻於自身的運動行為上，而在遞迴階層數、角度變量比率與環繞半徑的因素。遞迴亦為一種概念，繼續發展其它具有遞迴架構的運動型式，如追逐(pursuit)、簡諧(simple harmonic)與螺旋(spirals)等遞迴運動，以獲得其它不同感受的幾何圖樣，皆是未來持續研究的課題。在可見的未來裡，造型藝術創作早已不再使用單一媒體/型式與方法來進行，本研究初步經由物理的角度出發，結合數學的概念所獲得兼具視覺藝術的造型，這種新的嘗試能幫助設計活動獲取多變與豐富的素材。



## 參考文獻

1. 廖冠智, 孫晉望, 2004, 描圖器與相對運動軌跡之造形方法, 設計學報第九卷第一期, 中華民國設計學會, 台北, pp.87-106。
2. Abelson, Harold, diSessa, Andera, 1968, Turtle Geometry, MIT Press, pp.37-39, 120-122.
3. Heidi Burgiel, Recursion in Logo, <http://www2.math.uic.edu/~burgiel/Mtth480/logo3.html>
4. Jose Wudka., The Concept Map for the Geometric Model. [http://phyun5.ucr.edu/~wudka/Physics7/Concept\\_maps/geocentric.html](http://phyun5.ucr.edu/~wudka/Physics7/Concept_maps/geocentric.html)
5. Krawczyk, Robert, 1999, "Spirolaterals, Complexity from Simplicity", in International Society of Arts, Mathematics and Architecture 99, edited by N. Friedman and J. Barrallo, The University of the Basque Country, pp. 293-299.
6. May, E. S. 2004, Fibonacci Spirals, <http://www.moonstar.com/~nedmay/chromat/fibonacci.htm>.
7. Martineau, John., 2001, A Little Book of Coincidence. Walker & Company, New York.
8. Mike Field, 1992, Gallery of symmetric chaos page, <http://nohung.math.uh.edu/~mike/ag/art.html>.
9. Odds, F.C. 1973, "Spirolaterals." *Math. Teacher* 66, pp.121-124.
10. Vagn Lundsgaard Hansen., 1993, Geometry in Nature. Massachusetts: AK Peter Ltd.

# A Study on Geometric Patterns of Recursive Multiple-level Relative Motions

G. Z. Liao\* C. W. Sun\*\*

\* Department of Information and Design, Taichung Healthcare and Management University  
e-mail:can@thmu.edu.tw

\*\* College of Design, National Taiwan University of Science and Technology  
e-mail:suncw@mail.ntust.edu.tw

(Date Received : December 17, 2003 ; Date Accepted : March 11, 2005)

## Abstract

The purpose of this study is to develop methods to control geometric patterns created from trajectories of recursive multiple-level relative motions (R-MRM). Earlier studies indicated that trajectories of R-MRM can be highly visually appealing, but to certain extent unpredictable. We started from systematically manipulating angular variance and observing according geometric patterns, followed by analyzing the mathematical relationship among individual angles. Research findings suggest that "ratios of angular variances" and "balance of total clockwise and counter-clockwise angular amounts".

From aesthetic point of view, recursive multiple-level relative motion can be a promising way of generating interesting patterns, and the possibilities are endless. There exist treasures that call for further exploration.

Keywords: Recursion, Relative Motion, Trajectory, Geometric Patterns